從機率到幾何 —— Jean-Michel Bismut 的數學工作縱覽

作　者 : 麻小南

翻　譯 : 邵國寬

校　對 : 姚一雋

Jean-Michel Bismut[1] 的數學工作涵蓋兩個數學分支: 機率論與流形上的幾何分析。來自機率論的思想在他的幾何著作中發揮著重要作用。數學物理也是他諸多工作的動機。

在這篇文章中, 我們將首先介紹 Bismut 的更具機率屬性的工作。文章的第二部分將介紹 Bismut 在幾何上的貢獻。

1. 機率論工作

Jean-Michel Bismut 於 1967 年考入巴黎綜合理工大學, 他上了 Laurent Schwartz 的數學課, 還有 Jacques Neveu 的機率論以及 Paul Malliavin 的調和分析。1970 年以第一名的成績畢業並進入 Corps des Mines[2], Bismut 於 1973 年在 Jacques-Louis Lions 與 Jacques Neveu 的指導下獲得巴黎六大授予的數學國家博士學位, 他的博士論文題目是《凸分析與機率》。

我們將描述他博士論文的一個結果, 其中方法將決定他後來的部分工作。

回顧一下, 如果我們通過在適當條件下考慮泛函 $\int_0^T L(t, x_t, u_t)dt + \Phi(x_T)$ 的極值, 來控

[1]巴黎薩克雷大學榮休教授、奧賽 (Orsay) 數學系成員 Jean-Michel Bismut 獲得了 2021 年邵逸夫獎。巴黎西岱大學教授、Jussieu 數學所成員麻小南爲此寫了這篇文章, 回顧 J.-M. Bismut 的工作。原文鏈接見 La Lettre de l'INSMI。

[2]法國高級公務員的一種。

制一個如下類型的常微分方程

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, u_t), \tag{1.1}$$

Pontryagin 極大值原理允許我們構造一個相關的 Hamilton 量 $H(t,x,p,u)$。我們在約束條件 $\frac{\partial}{\partial u}H = 0$ 下求解相空間 (x,p) 中對應的 Hamilton 方程。該解的 x 分量就是初始變分問題的極值解。

在他的博士論文 [1] 以及 [2] 中, Bismut 建立了 Pontryagin 極大值原理的隨機版本。我們要控制下述 Itô 型的隨機微分方程

$$dx_t = f(t, x_t, u_t)dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t, x_t, u_t)\delta w^i, \tag{1.2}$$

其中 w 是 m 維 Brown 運動, δw 是它的 Itô 微分, u 是一個僅依賴於 w 過去狀態的控量。我們想找到泛函 $E[\int_0^T L(t,x_t,u_t)dt + \Phi(x_T)]$ 的極值, 其中 E 表示期望。

新的 Hamilton 量可以寫成如下形式:

$$\mathscr{H} = \langle p, f\rangle + \langle H, \sigma\rangle - L. \tag{1.3}$$

在 (1.3) 中, H 表示僅依賴於過去狀態的另一個過程。Bismut 建立了下述 Hamilton 方程組

$$\begin{aligned} dx &= \partial_p \mathscr{H} dt + \partial_H \mathscr{H} \cdot \delta w, \quad x(0) = x_0, \\ dp &= -\partial_x \mathscr{H} dt + \partial_\sigma \mathscr{H} \cdot \delta w, \quad p_T = -\partial_x \Phi(x_T), \\ \frac{\partial}{\partial u}\mathscr{H} &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

與確定性控制情形類似, 受控過程 x 滿足初始條件, 而對應的僅依賴於 Brown運動過去狀態的對偶過程p滿足終止條件。這個矛盾只是表面的: H 的選擇讓我們能解這個方程。過程 p 滿足的方程 (1.4) 現在被稱爲“倒向隨機微分方程”。

Bismut 將隨機 Pontryagin 極大值原理應用於帶有二次判據的線性隨機微分方程中 [4], 並且應用於經濟增長的數學模型 [3]。

上世紀 90 年代, Etienne Pardoux 與彭實戈發展了 Bismut 的思想, 構建了倒向隨機微分方程理論, 並建立了這個隨機極大值原理的各種版本。這一原理已經成爲金融數學的主要工具之一。

Bismut 在機率論上的另一工作 [5] 與 Malliavin 分析有關。Malliavin 基於無窮維諧振子證明了 Brown 運動的機率空間上的一個分部積分公式。Bismut 利用 Girsanov 定理給出了研究 Malliavin 分析的另一種方法, Girsanov 定理是關於 Brown 測度在某些隨機平移下保持准不變性的公式, 以此可立即得出分部積分公式。後來 Bismut 將他的上述方法與大偏差理論結合起來 [7]。這些結果將在他的局部指標理論成就上扮演重要角色。

爲解釋 Bismut 的研究方向往指標理論的轉變, 我們需要重申任意分部積分公式都源於某個對微分形式積分的 Stokes 公式。Bismut 將逐步嘗試找出 Malliavin 分析的上同調內涵。

2. **Atiyah-Singer** 指標定理及其應用

Bismut 後續轉向研究 Atiyah-Singer 指標定理及其應用。如果 X 是一個 n (偶數) 維緊致流形, P 是一個橢圓微分算子, P 的指標則是 P 的核空間與餘核空間維數之差。該指標只取決於 P 的主象徵。1963 年的 Atiyah-Singer 定理通過與主象徵相關的示性類給出了 P 的指標的上同調[3]表達式。

Atiyah 與 Singer 發現了作用在旋量與向量叢 E 的張量積的幾何 Dirac 算子。de Rham-Hodge 算子 $d + d^*$、Dolbeault-Hodge 算子 $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ 都可以看成是 Dirac 算子。Atiyah、Bott 與 Patodi 證明了 Dirac 算子的指標定理可以推出任意橢圓算子的 Atiyah-Singer 定理。

2.1. 超跡

我們有關於 Dirac 算子的指標定理的一個局部版本。實際上對於這樣的一個算子 D, 譜理論的論證表明

$$\operatorname{Ind} D_+ = \operatorname{Tr_s}\left[\exp\left(-tD^2\right)\right], \tag{2.1}$$

對於任意 $t > 0$ 成立, 其中 $\operatorname{Tr_s}$ 表示超跡[4]。如果 $P_t(x, x')$ 表示熱算子 $\exp(-tD^2)$ 的相對於 Riemann 體積元 dx' 的光滑核, 我們有

$$\operatorname{Ind} D_+ = \int_X \operatorname{Tr_s}\left[P_t(x,x)\right] dx. \tag{2.2}$$

我們知道當 $t \to 0$ 時, $\operatorname{Tr_s}[P_t(x,x)]$ 有如下類型的一致漸近展開

$$\operatorname{Tr_s}\left[P_t(x,x)\right] = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -n/2\le k\le N}} a_k(x)\, t^k + \mathcal{O}\left(t^{N+1}\right), \tag{2.3}$$

其中這些係數 $a_k(x)$ 只依賴於局部的幾何量。McKean 和 Singer 於 1967 年猜想: 如果 $D = d + d^*$, 那麼“奇蹟般的抵消” 會發生在 $\operatorname{Tr_s}[P_t(x,x)]$ 上, 對於 $k < 0, a_k = 0$ 並且 a_0 和陳省身從 TX 上的 Levi-Civita 聯絡出發構造的 Euler 形式一致。該猜想很快被推廣至所有的幾何 Dirac 算子上。McKean-Singer 猜想 (即局部指標定理) 由 Patodi、Gilkey、Atiyah-Bott-Patodi 證明。Bismut 給出了局部指標定理與 Lefschetz 不動點定理的一個機率證明 [6]。虧格 $\widehat{A}$ 由 Paul Lévy 的面積公式得到。

---

[3] 與向量叢關聯的上同調類稱爲示性類。

[4] 在一個 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空間 $E = E_+ \oplus E_-$ 上, 如果 τ 是定義該 $\mathbb{Z}_2$-分次的對合映射, 則 $A \in \operatorname{End}(E)$ 的超跡定義爲 $\operatorname{Tr_s}[A] = \operatorname{Tr}[\tau A]$。

局部指標理論取得了長足的發展, 這裡我們不再介紹。特別是 Bismut 將其發展爲探索與指標理論相去甚遠的數學問題的一種工具。我們在此描述 Bismut 關注過的兩個問題。

1. 對於 Dirac 算子簇, 指標定理有一個相對版本, 這時指標取值於底流形的偶數維上同調。Bismut [8] 給出了 Dirac 算子簇的指標定理的一個局部版本, 其中利用 Chern-Weil 理論, 上同調類被對應的顯式微分形式取代。Bismut 爲此利用 Quillen 的超聯絡理論, 構造了對應於流形簇 (或纖維叢) 的所謂的 Bismut 超聯絡。在 Berline-Getzler-Vergne 的書 [13] 中, 以更偏向表示論的不同視角重新處理了部分結果。

   Bismut 超聯絡在所有後續構造中都有出現, 例如 Bismut-Cheeger $\widetilde{\eta}$ 形式 [11]、Bismut-Köhler 全純解析撓率形式 [10, 14] 以及平坦向量叢的 Bismut-Lott 撓率形式 [16]。
2. 在 Quillen 工作的基礎上, Bismut 與 Freed [9]、Gillet-Soulé [10]、Lebeau [12] 一道發展了 Dirac 算子簇的行列式理論、全純向量叢的直像的帶有 Quillen 度量的行列式線叢理論。這些結果在 Gillet 與 Soulé 證明 Arakelov 幾何中的 Riemann-Roch-Grothendieck 定理時發揮著至關重要的作用。

2.2. 行列式

我們現在更具體地描述上述某些結果。假設 E 是一個複流形 X 上的一個全純向量叢, 令 $H\left(X,E\right)$ 表示相應的 Dolbeault 複形的上同調, λ 表示該上同調的行列式[5]。

將調和形式的 L_2 度量用 Ray-Singer 全純解析撓率加以修正, 我們就得到了 λ 上的 Quillen 度量。所謂 Ray-Singer 全純解析撓率是 Hodge Laplace 算子的行列式在不同次數上的加權交錯乘積。這些行列式由對應 zeta 函數在 0 點處的取值定義。因此解析撓率就是 Hodge Laplace 運算元的一個譜不變量。在纖維叢情形下, λ 是底流形上的 Hermite 全純線叢。Bismut-Gillet-Soulé 曲率定理指出, 在適當條件下, 這個 Hermite 全純線叢 λ 的曲率由局部顯式公式給出, 這在微分形式層面上改進了行列式線叢的 Riemann-Roch-Grothendieck 定理。

Bismut-Lebeau 的工作聚焦於 Quillen 度量在嵌入映射的行爲。該工作構造了這些度量的局部比較的局部表達式, 利用了 Bismut-Gillet-Soulé 另一工作構造的 Bott-Chern 流。Bismut 在 [17] 中將該結果推廣到嵌入與淹沒的複合映射情形下。

Ray-Singer猜想描述了兩個不變量是相等的, 其一是組合不變量 Reidemeister 撓率, 其二是 de Rham 理論中 Hodge Laplace 算子的譜不變量 Ray-Singer 實撓率。Bismut 與張偉平 [15] 沿著上述工作的相似思路, 給出了該猜想的一個新證明。Bismut-張的結果也可應用到任意的平坦向量叢, 其中修正項會出現。Bismut-張的證明利用了 Witten Laplace 算子, 該算子是通常 Hodge 理論的基於體積元的修正的形變。

[5]如果 E 是一個有限維複向量空間, 則 $\det E = \bigwedge^{\max} E$。如果 E 還是 $\mathbb{Z}$-分次的, $\det E$ 則是不同分次的行列式的交錯乘積。

通過發明和應用新的數學物件, Bismut 爲指標理論的革新做出了貢獻, 以他命名的超聯絡就是一個例證。他還發展了全新的技術, 比如 Bismut 和 Lebeau 在他們關於複嵌入的開創性論文中引入的技術, 其中譜理論、局部指標理論與機率論以出人意料的方式交匯融合, 並產生了諸多應用。研究 Bergman 核的專著 [19] 就部分受到了 Bismut-Lebeau 文章的啟發。

3. 亞橢圓 Laplace 算子

3.1. 無處不在的諧振子

衆所周知, 在 Schrödinger 算子的譜局部化問題中, 爲了建立該算子特徵函數的局部化模型, 我們通常會化歸到 Schrödinger 算子變成諧振子[6]的模型情形。

我們想知道這個諧振子的出現是否與一個更爲本質的諧振子的存在性相關聯, 如果的確如此, 那麼這個諧振子會有什麼用。這些是 Bismut 將要試圖回答的問題。

3.2. **Witten Laplace** 算子與亞橢圓 **Laplace** 算子

亞橢圓 Laplace 算子的第一個版本出現在 Morse 理論的背景下。在賦予 Morse 函數 f 的流形 X 上, 我們已經提到過 Witten 的 Laplace 算子 $\square_f^X$。

在 Riemann 流形 X 的閉路空間 LX 上, Bismut 提出了 Witten 的 Laplace 算子是否存在的問題。由於 Hodge Laplace 算子在 LX 上不存在, Bismut 想構造 Witten 形變的半經典版本。Bismut 最終帶來的並不是構造 LX 上 Hodge 理論的 Witten 形變, 而是構造 X 上通常的 Hodge Laplace 算子的亞橢圓形變 [18]。在這個構造過程中, 有一個額外參數 $b > 0$, 對應了 LX 上 Witten 形變的參數。

設 $Y^{\mathcal{H}}$ 是生成測地流的餘切叢 $\mathcal{X}$ 上的向量場, $L_{Y^{\mathcal{H}}}$ 是關於 $Y^{\mathcal{H}}$ 的 Lie 導數, 亞橢圓 Laplace 算子 L_b^X 是 $\mathcal{X}$ 上形如

$$L_b^X = \frac{H}{b^2} - \frac{L_{Y^{\mathcal{H}}}}{b} + \cdots$$

的微分算子, 其中 H 是餘切叢的一個諧振子, $\cdots$ 表示低階項。由 Hörmander 的理論可知, 算子 $\frac{\partial}{\partial t} + L_b^X$ 是亞橢圓的。

Bismut 與 Lebeau [20] 建立了亞橢圓 Laplace 算子的解析性質。他們書中的主要結果正如所料, 說的是 de Rham 理論中的 Ray-Singer 解析撓率在亞橢圓形變下保持不變。

我們在這裡強調三點。

1. 算子 L_b^X 是統計力學中熟知的 Fokker-Planck 算子的一個幾何版本。
2. 當 $b \to 0$ 時, Laplace 算子 L_b^X 在適當的意義下收斂到 X 上通常的 Hodge Laplace 算

[6] 在 $\mathbb{R}$ 上的諧振子是算子 $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1$。

子 $\square^X/2$。

3. 樸素地感覺, 當 $b \to +\infty$ 時, L_b^X 會收斂到算子 $-L_{Y^{\mathcal{H}}}$。Bismut-Lebeau 的解析工作主要關注的是 $b \to 0$ 時的收斂情況。

亞橢圓 Laplace 算子給出了 Laplace 算子與測地流之間的一種自然過渡, Bismut 在後續工作中將利用這個事實研究跡公式。

3.3. 跡公式與軌道積分

1950 年至 1978 年發展起來的 Selberg 跡公式與 Harish-Chandra 關於軌道積分的 Plancherel 公式在表示論與數論中發揮著根本性的作用。它們給出了一種演算法, 可以借助軌道積分計算某些作用於 G/Γ 上 L^2 函數空間的算子的跡, 其中 Γ 是 G 的算術子群。

Bismut [21] 從微分幾何觀點研究這些軌道積分, 他證明了亞橢圓 Laplace 算子的另一版本可以使這個研究變得可能。儘管對一般 Riemann 流形的亞橢圓形變, 僅會有某些譜不變量保持不變, 但是 Bismut 將證明對於他構造的亞橢圓形變, 且特定於局部對稱空間上, Laplace 算子的譜根本上保持不變。這個觀點有助於他給出關於群上 Laplace 算子即 Casimir 算子的半單軌道積分的局部顯式幾何公式。為了構造這個新的亞橢圓形變, Bismut 利用了由 Kostant 引入的另一個 Dirac 算子。

文獻 [23] 給出了 Bismut 這些結果的詳細回顧, 以及由申述得到的這些公式的一個應用: 1986 年提出的 Fried 猜想的解決, 即對於非緊形局部對稱空間, 解析撓率與 Ruelle 的動力 zeta 函數在 0 點處的取值相等。

3.4. 複幾何中的亞橢圓 **Laplace** 算子

在複幾何中, Bismut 構造了亞橢圓 Laplace 算子的另一版本。其動機有所不同。這涉及到克服在由橢圓 Laplace 算子展開的局部指標的計算中不可避免的局部障礙的問題。申述、韋兆汀與 Bismut [22, 24] 證明了一個取值在 Bott-Chern 上同調的 Riemann-Roch-Grothendieck 定理, 該定理可以應用到任意的緊致複流形以及對應的凝聚層上。亞橢圓 Laplace 算子在上述主要定理的證明中發揮著根本作用。

4. 結論

Bismut 在與 Michael Atiyah、Paul Malliavin、Daniel Quillen 的交往中直接受到了他們的影響。此外, Bismut 在奧賽巴黎第十一大學的數學系度過了他的數學生涯。該系在他作為數學家的成長過程中發揮著至關重要的作用, 這要歸功於那裡特別的學術氛圍, 以及他在那裡結交的朋友們。

從 1996 年到 2008 年, Bismut 與 Gerd Faltings 一起擔任《*Inventiones Mathematicae*》的主編。他曾是國際數學聯盟執委會委員 (1998～2002) 和副主席 (2002～2006)。

通過在倒向隨機微分方程、Malliavin 分析、指標理論、亞橢圓 Laplace 算子的工作, Bismut 對機率論、微分幾何、流形上的分析做出了根本性的貢獻, 他的工作在數論與表示論中也有重要應用。Bismut 爲將機率論置身於當代數學的核心中做出了非凡貢獻。

我們希望本文對 Bismut 工作的描述可以讓讀者對他數學成就的深度與廣度有一些感受。

參考文獻

1. Bismut, J.-M. *Analyse convexe et probabilités.* Thèse, Université Paris VI, 1973.
2. Bismut, J.-M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.*, 44:384–404, 1973.
3. Bismut, J.-M. Growth and optimal intertemporal allocation of risks. *J. Econom. Theory*, 10(2):239–257, 1975.
4. Bismut, J.-M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM J. Control Optimization*, 14(3):419–444, 1976.
5. Bismut, J.-M. *Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 56(4):469-505, 1981.
6. Bismut, J.-M. The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I. The index theorem. II. The Lefschetz fixed point formulas. *J. Funct. Anal.*, 57(1):56–99, 329–348, 1984.
7. Bismut, J.-M. *Large deviations and the Malliavin calculus*, volume 45 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984, viii+216 pp.
8. Bismut, J.-M. The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs. *Invent. Math.*, 83(1):91–151, 1986.
9. Bismut, J.-M. and Freed, D. The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem. *Comm. Math. Phys.*, 107(1):103–163, 1986.
10. Bismut, J.-M., Gillet, H. and Soulé, C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II, Direct images and Bott-Chern forms. III, Quillen metrics on holomorphic determinants. *Comm. Math. Phys.*, 115, 79–126, 301–351, 1988.
11. Bismut, J.-M. and Cheeger, J. η-invariants and their adiabatic limits. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(1):33–70, 1989.
12. Bismut, J.-M. and Lebeau, G. Complex immersions and Quillen metrics. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.*, 74, ii+298 pp. (1992), 1991.
13. Berline, N., Getzler, E. and Vergne, M. *Heat kernels and Dirac operators.* Grundl. Math. Wiss. Band 298. Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+369 pp.
14. Bismut, J.-M. and Köhler, K. Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas. *J. Algebraic Geom.*, 1(4):647–684, 1992.
15. Bismut, J.-M. and Zhang, W. An extension of a theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, 205, 235 pp, 1992. With an appendix by François Laudenbach.
16. Bismut, J.-M. and Lott, J. Flat vector bundles, direct images and higher real analytic

torsion. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(2):291–363, 1995.

17. Bismut, J.-M. Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms. *Astérisque*, 244, viii+275 pp, 1997.
18. Bismut, J.-M. The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2):379–476, 2005.
19. Ma, X. and Marinescu, G. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, xiv+422 pp.
20. Bismut, J.-M. and Lebeau, G. *The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics*, volume 167 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008, x+367 pp.
21. Bismut, J.-M. *Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals*, volume 177 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011, xii+330 pp.
22. Bismut, J.-M. *Hypoelliptic Laplacian and Bott-Chern cohomology*, A theorem of Riemann-Roch-Grothendieck in complex geometry. volume 305 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser/Springer, Cham, 2013, xvi+203 pp.
23. Ma, X. Geometric hypoelliptic Laplacian and orbital integrals [after Bismut, Lebeau and Shen]. *Astérisque* 407, Exp. No. 1130, 333–389. 2019. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135.
24. Bismut, J.-M., Shen, S. and Wei, Z. Coherent sheaves, superconnections, and RRG. *arXiv e-prints*, arXiv:2102.08129, 2021, 161 pp.

—本文作者: 麻小南任教於巴黎西岱大學 翻譯: 邵國寬任教於中國中山大學 校對: 姚一雋任教於中國復旦大學—